OPOSICIONES FÍSICA Y QUÍMICA

TEMA 4

Cinemática. Elementos para la descripción del movimiento. Movimientos de especial interés. Métodos para el estudio experimental del movimiento.

© 2026 José Javier Fernández Romero · EDUka-t · preparadorfisicayquimica.es · Contacto con el autor por WhatsApp: 678 440 047

Índice

Mapa conceptual del tema 2

1 Introducción 3

2 ¿Por qué estudiar el movimiento? La cinemática 3

3 Elementos para la descripción del movimiento 4
- 3.1 Sistema de referencia . . . 4
- 3.2 Vector posición . . . 4
- 3.3 Vector desplazamiento . . . 5
- 3.4 Velocidad . . . 5
- 3.5 Aceleración . . . 6

Movimientos de especial interés

4 Movimientos rectilíneos 9
- 4.1 Movimiento rectilíneo uniforme (MRU) . . . 9
- 4.2 Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA) . . . 10

5 Composición de movimientos. Tiro parabólico 11

6 Movimientos circulares 14
- 6.1 Movimiento circular uniforme (MCU) . . . 15
- 6.2 Movimiento circular uniformemente acelerado (MCUA) . . . 16

7 Movimiento armónico simple 17

Métodos para el estudio experimental del movimiento

8 Técnicas de medida y tratamiento de datos 19

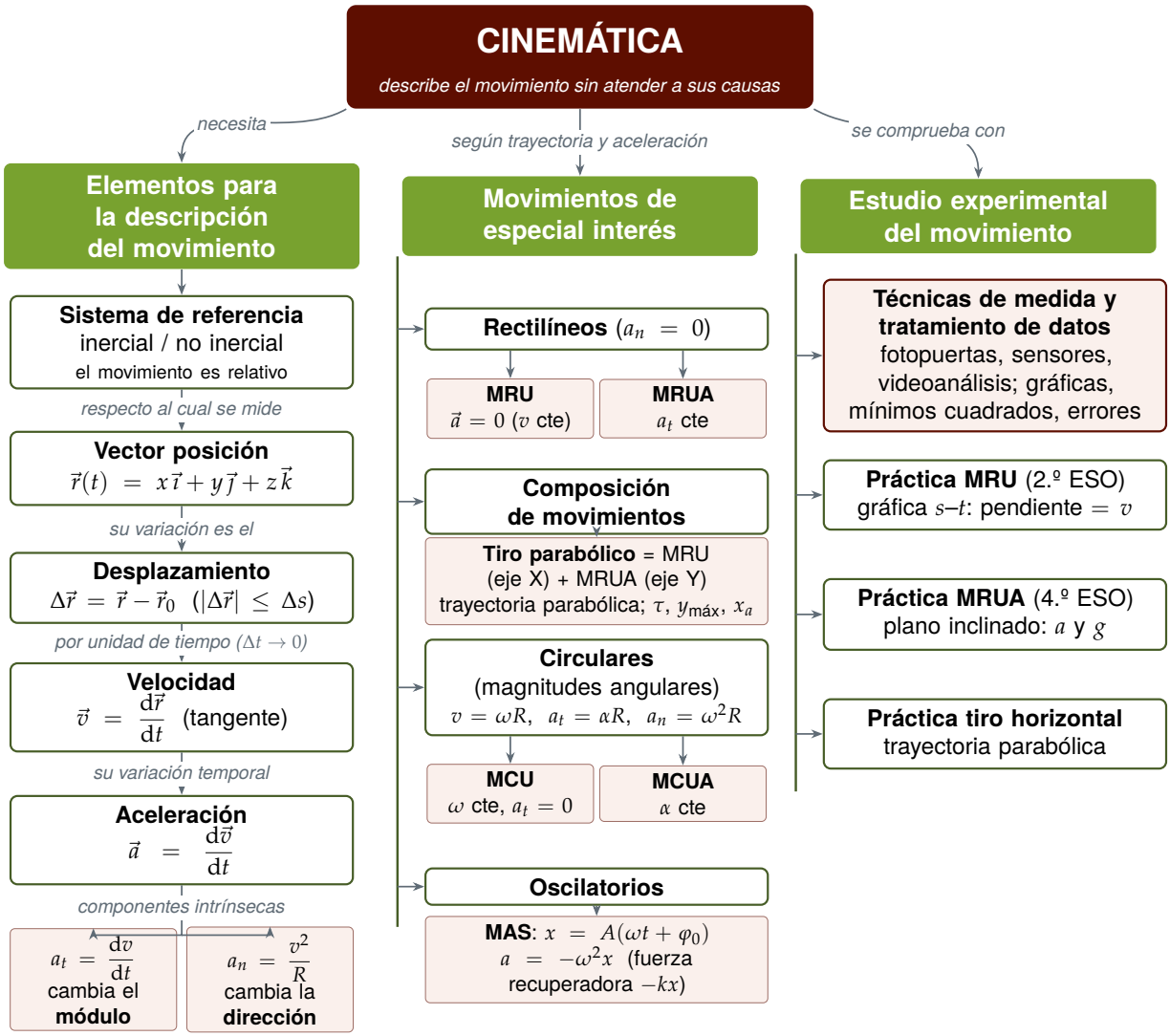
9 Práctica de laboratorio: MRU 20

10 Práctica de laboratorio: MRUA 21

11 Práctica de laboratorio: tiro horizontal 22

12 Conclusión y valoración personal 24

Mapa conceptual del tema



Hilo conductor didáctico: el parque de atracciones

montaña rusa (sistema de referencia, MRU) · torre de caída libre (MRUA) · caseta de dardos (tiro parabólico) · noria (MCU y MCUA) · barco pirata (MAS)

Cómo leer estos apuntes

Núcleo del tema Texto normal y fórmulas en recuadro verde. Es lo que se desarrolla por escrito en el examen: definiciones, resultados y razonamientos esenciales.

Para profundizar Recuadros grises: demostraciones completas, notas de ampliación y ejemplos resueltos (etiqueta «para entender»). No es necesario copiarlos en el examen, pero conviene dominarlos: permiten justificar los resultados si el tribunal pregunta y, si sobra tiempo, añadir una demostración breve suma valor.

Nota para personalizar Recuadro discontinuo: orientaciones para adaptar la referencia curricular (recomendable, no obligatoria).

1 Introducción

«*Profe, si el móvil ya me dice a qué velocidad voy en bici, ¿para qué tengo que aprenderme esto?*». La pregunta llega un viernes a última hora, con media clase mirando el reloj. Es una duda honesta que refleja cómo viven la asignatura muchos adolescentes: en plena etapa de cambios emocionales y cognitivos, desconectan con facilidad si no encuentran sentido a lo que aprenden. Nuestro reto como docentes no es solo transmitir conocimiento, sino conseguir que les importe.

Y en eso la física y la química juegan con ventaja: están en todo lo que les rodea. El GPS de su móvil, la frenada de un patinete eléctrico o la bajada de una montaña rusa son física en estado puro. Con tantos ejemplos a mano, no tenemos excusa para aburrir. Explicarles qué ocurre cuando el vagón se lanza cuesta abajo, o cómo sabe el móvil a qué velocidad se mueven, es la mejor manera de que el aprendizaje sea significativo.

Eso no significa renunciar al rigor. En el desarrollo de este tema me ajusto al contenido y a la estructura que exige la convocatoria de oposiciones, así como a la normativa educativa vigente (LOMLOE), que pone el foco en las competencias y en las situaciones de aprendizaje contextualizadas. En el marco de la LOMLOE, el Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, que establece las enseñanzas mínimas de la ESO, organiza los saberes básicos de Física y Química en cinco bloques: A) Las destrezas científicas básicas, B) La materia, C) La energía, D) La interacción y E) El cambio. La cinemática se sitúa en el bloque D, donde el alumnado describe y predice movimientos sencillos. En Bachillerato, el Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, le dedica un bloque propio (Cinemática) en la Física y Química de 1.º. Combinaremos, por tanto, precisión conceptual y enfoque pedagógico con un objetivo claro: despertar la curiosidad de nuestros alumnos.

Nota para personalizar RECOMENDABLE

Sobre la referencia curricular. Mencionar el currículo en la introducción no es obligatorio, pero sí recomendable. El párrafo anterior es un *ejemplo* basado en los reales decretos estatales de enseñanzas mínimas (Real Decreto 217/2022 para la ESO y Real Decreto 243/2022 para Bachillerato). Lo ideal es citar también el decreto de tu comunidad autónoma, aunque no todas las convocatorias lo exigen. Todo esto lo veremos en detalle en las clases de preparación de la programación didáctica, y podrás hacerlo sin necesidad de memorizar tema a tema esta personalización de la introducción.

2 ¿Por qué estudiar el movimiento? La cinemática

De camino al instituto me cruzo con coches, bicis, patinetes, gente que corre para no perder el autobús... Todo a mi alrededor se mueve. Tan presente está el movimiento que la física tiene una rama que se dedica a estudiarlo: **la cinemática, que describe el movimiento sin tener en cuenta las causas que lo generan y que, en su forma más sencilla, considera los objetos como puntuales** (modelo de *partícula* o *punto material*).

En mecánica clásica, el movimiento se describe matemáticamente sobre un espacio de cuatro dimensiones: las tres dimensiones espaciales, x, y, z, y la temporal, t, que se considera absoluta (igual para todos los observadores).

Para estudiarlo nos iremos a un parque de atracciones: la mejor forma de acercar la física al alumnado es partir de experiencias que ya ha vivido en primera persona.

3 Elementos para la descripción del movimiento

Cualquier alumno sabe poner ejemplos de movimiento en un parque de atracciones (montañas rusas, torres de caída libre, norias...), pero ¿sabría definirlo con rigor?

Podríamos decirle que **el movimiento es un cambio de la posición de un cuerpo a lo largo del tiempo respecto de un sistema de referencia**, pero lo realmente importante es que comprenda qué elementos necesita para describirlo.

3.1 Sistema de referencia

Imaginemos a dos amigos en el mismo vagón de la montaña rusa. ¿Se están moviendo? La pregunta les parecerá obvia. Pero si le preguntamos a uno de ellos por su compañero, que sigue sentado a su lado, ¿dirá que se mueve? Así descubren por sí mismos la necesidad de un sistema de referencia.

Un **sistema de referencia** es el conjunto formado por un observador, un origen, unos ejes coordenados y un reloj, que permite asignar a cada suceso una posición y un instante. Las trayectorias medidas y el valor numérico de muchas magnitudes son relativos al sistema de referencia que se considere; por esa razón se dice que **el movimiento es relativo**. Si mi sistema de referencia está fuera de la atracción, mis dos compañeros se mueven; si lo coloco en uno de los alumnos montados, el otro permanece en reposo respecto a ese sistema de referencia porque su posición no varía: siempre está sentado a su lado.

Según su estado de reposo o movimiento relativo, podemos clasificar los sistemas de referencia en:

- **Sistemas de referencia inerciales.** Aquellos que están en reposo o se mueven con movimiento rectilíneo y uniforme (sin aceleración). En ellos se cumplen las leyes de Newton (su fundamento dinámico se desarrolla en el Tema 5). En este tema nos centraremos en este tipo de sistemas.
- **Sistemas de referencia no inerciales.** Aquellos que están sometidos a una aceleración (por ejemplo, el propio vagón de la montaña rusa al tomar una curva).

3.2 Vector posición

En mecánica clásica, para hablar de posición usaremos unos ejes cartesianos y el tiempo. Se define el **vector posición** $\vec{r}$ como el vector que tiene su origen en el origen de coordenadas y su extremo en la posición del móvil:

$$\vec{r} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$$

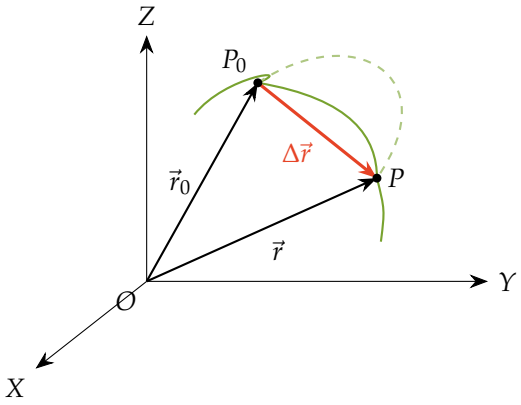
Cuando el móvil se desplaza, sus coordenadas dependen del tiempo, $\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{\imath} + y(t)\,\vec{\jmath} + z(t)\,\vec{k}$. Las tres funciones $x(t), y(t), z(t)$ son las **ecuaciones paramétricas** de la trayectoria; si eliminamos t entre ellas obtenemos la **ecuación de la trayectoria**. El módulo del vector posición es la distancia del móvil al origen: $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

3.3 Vector desplazamiento

Para poder abordar el estudio del movimiento es necesario expresar el cambio de posición de un móvil, que se representa mediante el llamado **vector desplazamiento**. Lo definiremos como el vector que tiene su origen en la posición inicial del móvil y su extremo en la posición final:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \Delta x\,\vec{\imath} + \Delta y\,\vec{\jmath} + \Delta z\,\vec{k}$$

Es independiente de la trayectoria y no hay que confundirlo con la distancia recorrida Δs (longitud del arco de trayectoria). En general $|\Delta\vec{r}| \leq \Delta s$, y solo son iguales en un movimiento rectilíneo sin cambio de sentido.



El móvil, al pasar de P_0 a P, puede seguir distintas trayectorias, pero el vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$ es siempre el mismo.

Figura 1: Vectores posición y vector desplazamiento.

3.4 Velocidad

Se llama **velocidad media** al desplazamiento que realiza un móvil por unidad de tiempo entre dos instantes dados:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{t - t_0}$$

Como $\Delta t > 0$, el vector velocidad media tiene la misma dirección y sentido que el vector desplazamiento. Solo compara la posición inicial con la final: no informa de lo que ocurre entre ambos instantes. No debe confundirse con la **rapidez media**, $\Delta s/\Delta t$, que usa la distancia recorrida sobre la trayectoria. Para describir el movimiento en cada instante necesitamos la velocidad instantánea.

Ejemplo: desplazamiento frente a distancia PARA ENTENDER

Un corredor da una vuelta completa a una pista de 400 m en 80 s. Como termina donde empezó, $\Delta\vec{r} = 0$ y su **velocidad media es nula**. Sin embargo, ha recorrido $\Delta s = 400$ m, así que su **rapidez media** es $400/80 = 5$ m/s. Las dos magnitudes responden a preguntas distintas: «¿cuánto me he alejado?» y «¿cuánto he corrido?».

La **velocidad instantánea** es **el límite de la velocidad media en un intervalo de tiempo infinitesimal**, es decir, cuando el incremento de tiempo tiende a cero:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

Demostración: la velocidad instantánea es tangente a la trayectoria PARA PROFUNDIZAR

Al hacer $\Delta t \to 0$, el punto P se acerca indefinidamente a P_0 y la cuerda $\overline{P_0P}$ (que tiene la dirección de $\Delta\vec{r}$) tiende a confundirse con la recta tangente a la trayectoria en P_0. Como $\vec{v}_m$ tiene siempre la dirección de $\Delta\vec{r}$, en el límite $\vec{v}$ tiene la dirección de la tangente. Además, en ese límite la cuerda y el arco se confunden, $|\mathrm{d}\vec{r}| = \mathrm{d}s$, de modo que

$$|\vec{v}| = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},$$

es decir, el módulo de la velocidad instantánea (la *rapidez*) es la derivada del espacio recorrido sobre la trayectoria respecto del tiempo.
Derivando componente a componente (los vectores $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ son constantes):

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{\imath} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{\jmath} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k}, \qquad |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Así, la velocidad instantánea es un vector tangente a la trayectoria en el punto donde se encuentra el móvil y con el sentido del movimiento. Si llamamos $\vec{u}_t$ al vector unitario tangente a la trayectoria en el sentido del movimiento, podemos escribir $\vec{v} = v\,\vec{u}_t$, con $v = |\vec{v}|$.

3.5 Aceleración

Para medir cómo varía la velocidad con el tiempo se define la aceleración. La idea clave es que la velocidad es un vector: cambia si cambia su módulo *o* su dirección. Por eso un coche que toma una curva a 50 km/h constantes también está acelerado. La **aceleración media** es la variación de la velocidad instantánea por unidad de tiempo entre dos instantes dados:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - t_0}$$

La aceleración media correspondiente a un intervalo de tiempo infinitamente pequeño recibe el nombre de **aceleración instantánea**. En términos matemáticos se expresa como:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

La aceleración instantánea es, por tanto, la derivada del vector velocidad respecto al tiempo (o la derivada segunda del vector posición). En componentes cartesianas: $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{\imath} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{\jmath} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$.

Componentes intrínsecas de la aceleración

Como la velocidad puede cambiar de dos maneras (en módulo y en dirección), resulta muy útil separar la aceleración en dos partes, una para cada efecto. Así, además de la descomposición en un sistema cartesiano, el vector aceleración se puede descomponer en dos componentes perpendiculares entre sí en un sistema de referencia **intrínseco** (ligado a la propia trayectoria):

- **Aceleración tangencial** ($\vec{a}_t$): es la componente del vector aceleración tangente a la trayectoria en ese punto (en la dirección del vector velocidad).
- **Aceleración normal** o centrípeta ($\vec{a}_n$): es la componente del vector aceleración perpendicular a la trayectoria en ese punto (perpendicular al vector velocidad) y dirigida hacia el centro de curvatura.

Consideremos un móvil puntual describiendo una trayectoria cualquiera que en un instante dado se encuentra en el punto P, con una velocidad $\vec{v}$ y una aceleración $\vec{a}$:

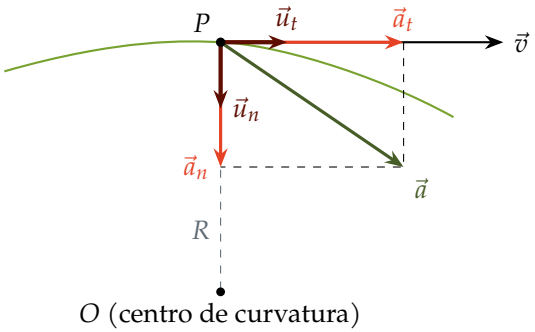


Figura 2: Componentes intrínsecas de la aceleración.

- $\vec{v}$: velocidad del móvil, tangente a la trayectoria en ese punto.
- $\vec{a}$: aceleración del móvil.
- $\vec{u}_t$: vector unitario tangente a la trayectoria y con el sentido del movimiento.
- $\vec{u}_n$: vector unitario perpendicular a la trayectoria y con sentido hacia el interior de la misma (hacia el centro de curvatura).
- R: radio de curvatura de la trayectoria en el punto P, que es la distancia desde dicho punto al centro de curvatura O (radio de la circunferencia que mejor se ajusta a la trayectoria en ese punto).

Demostración: obtención de a_t y a_n PARA PROFUNDIZAR

Paso 1. Escribimos la velocidad como producto de su módulo por el vector unitario tangente, $\vec{v} = v\,\vec{u}_t$. Al derivar respecto del tiempo hay que tener en cuenta que, salvo en un movimiento rectilíneo, *también* $\vec{u}_t$ *cambia*, porque cambia su dirección. Aplicando la regla de derivación de un producto:

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v\,\vec{u}_t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_t + v\,\frac{\mathrm{d}\vec{u}_t}{\mathrm{d}t}.$$

Paso 2: dirección de $\mathrm{d}\vec{u}_t/\mathrm{d}t$**.** Como $\vec{u}_t$ es unitario, $\vec{u}_t \cdot \vec{u}_t = 1$. Derivando esta igualdad:

$$2\,\vec{u}_t \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{u}_t}{\mathrm{d}t} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\vec{u}_t}{\mathrm{d}t} \perp \vec{u}_t,$$

luego $\mathrm{d}\vec{u}_t/\mathrm{d}t$ es perpendicular a la trayectoria: tiene la dirección de $\vec{u}_n$ (y apunta hacia el interior de la curva, que es hacia donde gira la tangente).

Paso 3: módulo de $\mathrm{d}\vec{u}_t/\mathrm{d}t$**.** En un tiempo $\mathrm{d}t$ el móvil recorre un arco $\mathrm{d}s$ y la tangente gira un ángulo $\mathrm{d}\varphi$. Como el arco se confunde con un arco de la circunferencia de radio R, se cumple $\mathrm{d}s = R\,\mathrm{d}\varphi$. Por otra parte, al girar un ángulo $\mathrm{d}\varphi$ un vector de módulo 1, su variación tiene módulo $|\mathrm{d}\vec{u}_t| = 1 \cdot \mathrm{d}\varphi$. Así:

$$\left|\frac{\mathrm{d}\vec{u}_t}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{R} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\vec{u}_t}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{R}\,\vec{u}_n.$$

Paso 4. Sustituyendo en la expresión del paso 1:

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_t + \frac{v^2}{R}\,\vec{u}_n.$$

Y como $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$ con $\vec{a}_t = a_t\,\vec{u}_t$ y $\vec{a}_n = a_n\,\vec{u}_n$, identificando términos se deduce que:

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad a_n = \frac{v^2}{R} \qquad |\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

Estas fórmulas de las componentes intrínsecas de la aceleración indican a qué son debidas:

- La **aceleración tangencial** origina un cambio en el **módulo** del vector velocidad. Si $a_t = 0$, el movimiento es uniforme.
- La **aceleración normal** origina un cambio en la **dirección** del movimiento, es decir, en la dirección de la velocidad. Si $a_n = 0$ (radio de curvatura infinito), el movimiento es rectilíneo.

Ejemplo: una rotonda a velocidad constante PARA ENTENDER

Un coche recorre una rotonda de radio $R = 20$ m a 36 km/h (10 m/s) sin variar la lectura del velocímetro. Como la rapidez no cambia, $a_t = 0$; pero la dirección sí, así que

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{10^2}{20} = 5\ \mathrm{m/s^2},$$

la mitad de g. Es la aceleración que «empuja» a los pasajeros hacia el lateral del coche.

Resumiendo, las relaciones matemáticas entre posición, velocidad y aceleración son:

- Aceleración = derivada de la velocidad; velocidad = derivada de la posición:

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}, \qquad \vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}.$$

- Posición = integral de la velocidad; velocidad = integral de la aceleración:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}\,\mathrm{d}t, \qquad \vec{v} = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}\,\mathrm{d}t.$$

Las constantes de integración $\vec{r}_0$ y $\vec{v}_0$ son las **condiciones iniciales**: para conocer el movimiento no basta con conocer la aceleración, hay que saber también dónde estaba el móvil y con qué velocidad se movía en el instante inicial.

Movimientos de especial interés

Una vez que tenemos las herramientas para poder describir un movimiento, el siguiente paso es descubrir qué tipos podemos encontrar en un parque de atracciones.

Las componentes intrínsecas nos dan el criterio para clasificarlos: si $a_n = 0$ la trayectoria es recta, y si $a_t = 0$ el movimiento es uniforme. Son **de especial interés** los movimientos que aparecen una y otra vez en la naturaleza y en la técnica y que, además, sirven de base para estudiar los demás, porque cualquier movimiento complejo puede tratarse como composición de ellos o aproximarse por ellos en un intervalo pequeño:

Movimiento	Aceleración	Atracción
Rectilíneo uniforme (MRU)	$\vec{a} = 0$	subida de la montaña rusa
Rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA)	$a_n = 0,\ a_t = \text{cte}$	torre de caída libre
Parabólico (composición MRU + MRUA)	$\vec{a} = \vec{g} = \text{cte}$	dardos de la caseta
Circular uniforme (MCU)	$a_t = 0,\ a_n = \omega^2 R = \text{cte}$	noria a régimen
Circular uniformemente acelerado (MCUA)	$a_t = \alpha R = \text{cte},\ a_n$ variable	noria al arrancar
Armónico simple (MAS)	$a = -\omega^2 x$	barco pirata

4 Movimientos rectilíneos

En un movimiento rectilíneo la trayectoria es una recta, por lo que $a_n = 0$ y la dirección de la velocidad no cambia. Al ser un movimiento unidireccional, podemos hacer un **tratamiento escalar** y no vectorial: tomamos la recta como eje, s es la posición sobre él, y el signo de v y de a indica su sentido.

4.1 Movimiento rectilíneo uniforme (MRU)

Volvamos a la montaña rusa. El vagón sube despacio hacia la cima con ese «clac, clac» que dispara los nervios: el pulso se acelera, pero el vagón no; avanza con velocidad constante. Es un MRU. ¿En qué consiste exactamente?

Las características que definen un MRU son una **trayectoria rectilínea** y una **velocidad constante** (en módulo, dirección y sentido). Por tanto $a_t = 0$ y $a_n = 0$: la aceleración es nula.

Demostración: ecuación del MRU PARA PROFUNDIZAR

Partimos de la definición de velocidad, $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$, de donde $\mathrm{d}s = v\,\mathrm{d}t$. Integramos entre el instante inicial t_0, en el que el móvil está en s_0, y un instante cualquiera t, en el que está en s:

$$\int_{s_0}^{s} \mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} v\,\mathrm{d}t.$$

Al ser v constante, sale fuera de la integral:

$$s - s_0 = v\,(t - t_0).$$

$$s = s_0 + v\,(t - t_0) \qquad \text{y, si } t_0 = 0: \qquad s = s_0 + v\,t$$

Ejemplo para el aula PARA ENTENDER

La pendiente de la gráfica s–t es la velocidad, y el área bajo la gráfica v–t (un rectángulo de base t y altura v) es el desplazamiento $s - s_0 = v\,t$. Esta lectura geométrica permite trabajar el MRU en 2.º ESO sin cálculo integral.

Las gráficas ilustran la evolución temporal de ambas magnitudes (v y s):

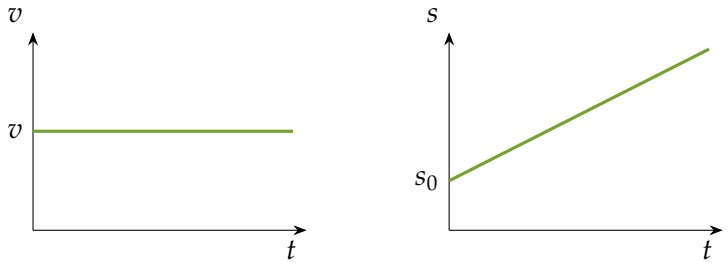


Figura 3: Gráficas velocidad–tiempo y posición–tiempo del MRU.

4.2 Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA)

Subamos ahora a la torre de caída libre. Arrancamos desde el reposo, caemos cada vez más rápido y, en el tramo final, los frenos de la atracción nos detienen. ¿Qué cambia respecto al MRU? Ahora la velocidad varía.

En el MRUA el vector aceleración no tiene componente normal y su componente tangencial es constante, así que el móvil describe una recta y su velocidad cambia uniformemente:

$$a_t = \text{cte}; \qquad a_n = 0; \qquad a = a_t$$

Demostración: ecuaciones del MRUA PARA PROFUNDIZAR

Velocidad. De la definición $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ obtenemos $\mathrm{d}v = a\,\mathrm{d}t$. Integrando entre $t_0 = 0$ (velocidad v_0) y t (velocidad v), con a constante:

$$\int_{v_0}^{v} \mathrm{d}v = \int_0^t a\,\mathrm{d}t \quad\Longrightarrow\quad v - v_0 = a\,t \quad\Longrightarrow\quad v = v_0 + a\,t.$$

Posición. Sustituimos esta velocidad en $\mathrm{d}s = v\,\mathrm{d}t$ e integramos entre $t_0 = 0$ (posición s_0) y t:

$$\int_{s_0}^{s} \mathrm{d}s = \int_0^t (v_0 + a\,t)\,\mathrm{d}t \quad\Longrightarrow\quad s - s_0 = v_0\,t + \tfrac{1}{2}\,a\,t^2.$$

Relación velocidad–posición. Eliminamos el tiempo entre las dos ecuaciones. De la primera, $t = \dfrac{v - v_0}{a}$; sustituyendo en la segunda:

$$s - s_0 = v_0\,\frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2}\,a\,\frac{(v - v_0)^2}{a^2} = \frac{2v_0 v - 2v_0^2 + v^2 - 2v_0 v + v_0^2}{2a} = \frac{v^2 - v_0^2}{2a},$$

es decir, $v^2 = v_0^2 + 2a\,(s - s_0)$.

Comprobación geométrica (útil en ESO): el desplazamiento es el área bajo la gráfica v–t, que es un trapecio de bases v_0 y v y altura t:

$$s - s_0 = \frac{v_0 + v}{2}\,t = \frac{v_0 + (v_0 + at)}{2}\,t = v_0\,t + \tfrac{1}{2}\,a\,t^2.$$

$$v = v_0 + a\,t \qquad s = s_0 + v_0\,t + \tfrac{1}{2}\,a\,t^2 \qquad v^2 = v_0^2 + 2a\,(s - s_0)$$

Si el módulo de la velocidad aumenta (aceleración del mismo signo que la velocidad), el movimiento es **acelerado**. Si el módulo de la velocidad disminuye (aceleración de signo contrario a la velocidad), el movimiento es **retardado** o decelerado. La **caída libre** es el MRUA más importante: si se desprecia la resistencia del aire, todos los cuerpos caen con la misma aceleración, sea cual sea su masa o su forma (Galileo); tomando el sentido positivo hacia arriba, $a = -g \approx -9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$.

Ejemplo: la distancia de frenado PARA ENTENDER

Un coche circula a 108 km/h (30 m/s) y frena con una deceleración constante de 6 $\mathrm{m/s^2}$. Con $v = 0$ en $v^2 = v_0^2 + 2a\,\Delta s$:

$$\Delta s = \frac{v_0^2}{2|a|} = \frac{30^2}{2 \cdot 6} = 75\ \mathrm{m}, \qquad t = \frac{v_0}{|a|} = 5\ \mathrm{s}.$$

Como Δs es proporcional a v_0^2, **al duplicar la velocidad la distancia de frenado se cuadruplica**: a 60 m/s serían 300 m. Es un ejemplo excelente para conectar el MRUA con la educación vial.

Las gráficas siguientes ilustran la evolución temporal de cada una de estas magnitudes (para $a > 0$):

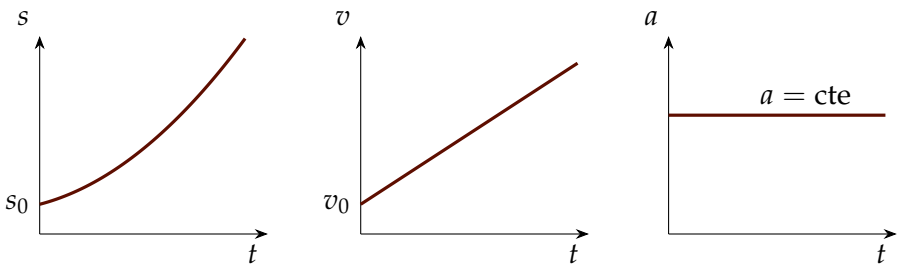


Figura 4: Gráficas posición–tiempo (parábola), velocidad–tiempo (recta de pendiente a) y aceleración–tiempo del MRUA.

5 Composición de movimientos. Tiro parabólico

Pasemos por una de las casetas: toca ganar un peluche reventando globos con dardos. ¿Qué trayectoria sigue el dardo? ¿Encaja en alguno de los movimientos que ya conocemos? Plantear estas preguntas antes de explicar nada es la mejor puerta de entrada al tiro parabólico y a la composición de movimientos.

El movimiento de nuestro dardo es, en esencia, la **composición de dos movimientos rectilíneos**, uno uniforme y otro uniformemente variado, **si se desprecia el rozamiento con el aire**. El primero, horizontal, se debe a la velocidad comunicada al dardo en el lanzamiento: como en esa dirección no actúa ninguna fuerza, la componente horizontal de la velocidad se conserva (principio de inercia). El segundo, vertical, es el resultado de la acción del campo gravitatorio terrestre sobre la masa del proyectil, que se traduce en una aceleración constante $\vec{g}$ dirigida hacia abajo.

Según el **principio de independencia de los movimientos** (Galileo), cada uno de ellos se produce como si el otro no existiera, y el movimiento resultante es su suma vectorial: $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$, $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ y $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$. Los casos más sencillos son la composición de dos MRU: si tienen la misma dirección, las velocidades se suman con su signo (quien camina por la cinta transportadora

del aeropuerto avanza a $v_1 + v_2$); si son perpendiculares, como una barca que cruza un río remando perpendicularmente a la corriente, el resultado es otro MRU, oblicuo, con $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

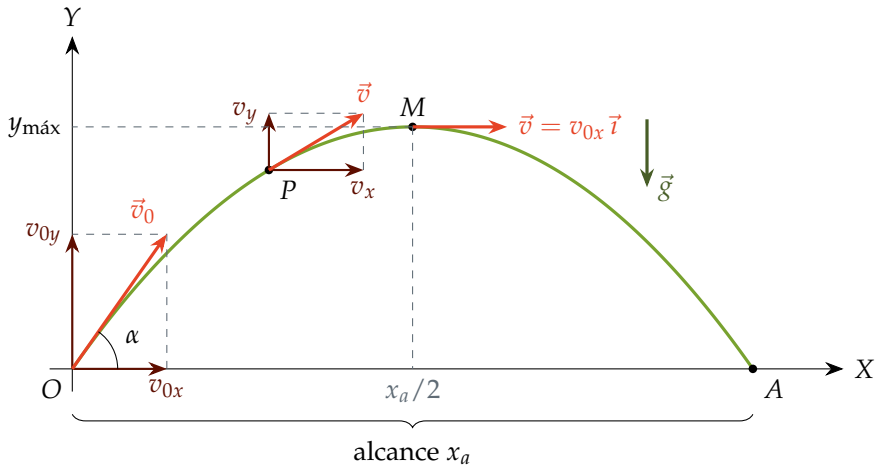


Figura 5: Tiro oblicuo o parabólico desde el suelo.

Situemos el origen del sistema de referencia en el punto de lanzamiento, con el eje X horizontal y el eje Y vertical hacia arriba. El dardo sale con una velocidad v_0 que forma un ángulo α con la horizontal; a partir de ese momento su movimiento es la suma de un MRU en el eje X y de un MRUA en el eje Y con aceleración $-g$. Las condiciones iniciales son:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0; \qquad v_{0x} = v_0 \cos\alpha, \quad v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\alpha; \qquad a_x = 0, \quad a_y = -g.$$

Aplicando a cada eje las ecuaciones del MRU y del MRUA:

Eje X (MRU)	**Eje Y (MRUA, $a_y = -g$)**
$a_x = 0$	$a_y = -g$
$v_x = v_0 \cos\alpha$	$v_y = v_0 \operatorname{sen}\alpha - g\,t$
$x = v_0 \cos\alpha \cdot t$	$y = v_0 \operatorname{sen}\alpha \cdot t - \frac{1}{2}\,g\,t^2$

Demostración: ecuación de la trayectoria PARA PROFUNDIZAR

Ecuación de la trayectoria. Despejamos el tiempo de la ecuación del eje X, $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$, y lo sustituimos en la del eje Y:

$$y = v_0 \operatorname{sen}\alpha \frac{x}{v_0 \cos\alpha} - \frac{1}{2}\,g\,\frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} \quad \Longrightarrow \quad y = x\ \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}\,x^2.$$

Es una función de segundo grado $y = b\,x - c\,x^2$ con $c > 0$: una **parábola** con el eje de simetría paralelo al eje de ordenadas y las ramas hacia abajo, cuyo vértice es el punto más alto de la trayectoria.

$$y = x\ \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}\,x^2 \qquad \text{(parábola)}$$

$$\vec{r}(t) = v_0 \cos\alpha\ t\,\vec{\imath} + \left(v_0 \operatorname{sen}\alpha\ t - \tfrac{1}{2}gt^2\right)\vec{\jmath} \qquad \vec{v}(t) = v_0 \cos\alpha\ \vec{\imath} + \left(v_0 \operatorname{sen}\alpha - g\,t\right)\vec{\jmath}$$

El módulo de la velocidad en cualquier instante es $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ y su dirección, tangente a la parábola, forma con la horizontal un ángulo θ tal que $\operatorname{tg}\theta = v_y/v_x$.

Calculemos ahora algunos parámetros característicos del tiro oblicuo o parabólico (lanzamiento desde el suelo):

Demostración: tiempo de vuelo, altura máxima y alcance

PARA PROFUNDIZAR

Tiempo de vuelo τ. Es el tiempo que emplea el proyectil en alcanzar de nuevo la horizontal. Se obtiene al hacer $y = 0$:

$$0 = v_0 \operatorname{sen}\alpha\, t - \tfrac{1}{2} g\, t^2 = t\left(v_0 \operatorname{sen}\alpha - \tfrac{1}{2} g\, t\right) \quad \Longrightarrow \quad t = 0 \ \text{(salida)} \quad \text{o} \quad \tau = \frac{2v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g}.$$

Altura máxima $y_{\text{máx}}$. En el punto más alto la velocidad es horizontal, es decir, $v_y = 0$:

$$0 = v_0 \operatorname{sen}\alpha - g\, t_s \quad \Longrightarrow \quad t_s = \frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g} = \frac{\tau}{2},$$

que coincide con la mitad del tiempo de vuelo por razones de simetría (esta coincidencia solo se da cuando el proyectil vuelve a la altura desde la que se lanzó). Sustituyendo t_s en la ecuación de y:

$$y_{\text{máx}} = v_0 \operatorname{sen}\alpha \frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{g^2} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{g} - \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{2g} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{2g}.$$

(*También se obtiene aplicando al eje Y la relación $v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g\,y$ con $v_y = 0$.*)

Alcance horizontal x_a. Se obtiene sustituyendo $t = \tau$ en la ecuación del eje X (o haciendo $y = 0$ en la ecuación de la trayectoria):

$$x_a = v_0 \cos\alpha \cdot \frac{2v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g} = \frac{v_0^2\,(2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha)}{g} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}.$$

$$\tau = \frac{2v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g} \qquad y_{\text{máx}} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{2g} \qquad x_a = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}$$

Amplía: consecuencias del tiro parabólico

PARA PROFUNDIZAR

- **Alcance máximo.** Para una v_0 dada, x_a es máximo cuando $\operatorname{sen} 2\alpha = 1$, es decir, para $\alpha = 45°$, y entonces $x_{a,\text{máx}} = v_0^2/g$.
- **Ángulos complementarios.** Como $\operatorname{sen} 2\alpha = \operatorname{sen}(180° - 2\alpha) = \operatorname{sen} 2(90° - \alpha)$, los lanzamientos con α y con $90° - \alpha$ tienen el mismo alcance (tiro «tenso» y tiro «por elevación»).
- **Tiro horizontal** ($\alpha = 0$) desde una altura h: tomando el origen en el suelo, $x = v_0 t$ e $y = h - \frac{1}{2} g t^2$. Haciendo $y = 0$ se obtiene el tiempo de caída $t = \sqrt{2h/g}$ y el alcance $x_a = v_0\sqrt{2h/g}$.

Ejemplo: un lanzamiento con números

PARA ENTENDER

Lanzamos un balón a $v_0 = 20$ m/s ($g = 9{,}8$ m/s^2):

- Con $\alpha = 45°$: $x_a = \dfrac{20^2 \operatorname{sen} 90°}{9{,}8} \approx 40{,}8$ m, $y_{\text{máx}} = \dfrac{20^2 \operatorname{sen}^2 45°}{2 \cdot 9{,}8} \approx 10{,}2$ m, $\tau = \dfrac{2 \cdot 20 \operatorname{sen} 45°}{9{,}8} \approx 2{,}9$ s.
- Con $\alpha = 30°$ o con $\alpha = 60°$: $x_a = \dfrac{400 \operatorname{sen} 60°}{9{,}8} \approx 35{,}3$ m en ambos casos, pero el de $60°$ sube

mucho más y tarda más en caer.

6 Movimientos circulares

Ninguna visita a la feria está completa sin la noria. Aquí la trayectoria cambia: ya no es una recta, sino una circunferencia. ¿Nos sirven las mismas magnitudes para describirla? ¿O tenemos que cambiar la forma de mirar el movimiento?

Se llama **movimiento circular** al de un móvil cuya trayectoria es una circunferencia.

Consideremos un móvil puntual moviéndose sobre una circunferencia de centro O y radio R, que en un instante determinado se encuentra en P. Para el estudio de este movimiento se podría tomar como referencia un sistema de ejes cartesianos con origen en O, pero las fórmulas resultarían complejas. Tomando como origen de arcos un punto P_0 de la circunferencia, la posición del punto P es más fácil de describir mediante el **ángulo** φ medido desde el centro de la circunferencia (considerando positivo el sentido antihorario), o mediante el **arco** S recorrido sobre ella.

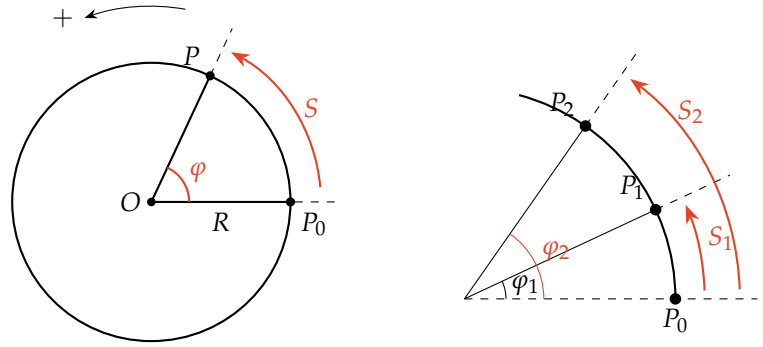


Figura 6: Posición angular φ y arco recorrido S en el movimiento circular.

En el SI el arco S se mide en metros y el ángulo φ en radianes (1 radián es el ángulo que abarca un arco de longitud igual al radio con el que se ha trazado). De la propia definición de radián se sigue que $S = \varphi\, R$.

Al estudiar el movimiento de un móvil que inicialmente no está en P_0 sino en P_1, y al cabo de un cierto tiempo en P_2, la fórmula *arco* = *ángulo* · *radio* queda como:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = (\varphi_2 - \varphi_1)\, R = \Delta\varphi \cdot R$$

A partir del arco recorrido y del ángulo girado se puede definir un nuevo concepto de velocidad muy útil para el movimiento circular: la velocidad angular.

Se llama **velocidad angular** de un movimiento circular al ángulo que gira el móvil por unidad de tiempo. Designaremos por ω_m a la velocidad angular media y por ω a la instantánea:

$$\omega_m = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \qquad \omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

La velocidad angular en el SI se expresa en rad/s. El signo de la velocidad angular, al igual que el de la lineal, es el que corresponde al sentido en que el móvil recorre su trayectoria.

Se llama **aceleración angular** a la variación de la velocidad angular por unidad de tiempo. Si designamos por α_m a la aceleración angular media y por α a la instantánea, se obtiene:

$$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad \alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

La aceleración angular en el SI se expresa en rad/s^2.

Relación entre las magnitudes lineales y angulares

Demostración PARA PROFUNDIZAR

Partimos de la relación entre arco y ángulo, $S = \varphi\, R$, donde R es constante.
Velocidad. Derivando respecto del tiempo:

$$v = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = R\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \omega\, R.$$

Aceleración tangencial. Volviendo a derivar:

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = R\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \alpha\, R.$$

Aceleración normal. Aplicamos el resultado general $a_n = v^2/R$ (el radio de curvatura de una circunferencia es su radio) y sustituimos $v = \omega R$:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R.$$

$$v = \omega \cdot R \qquad a_t = \alpha \cdot R \qquad a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R$$

Ejemplo para el aula PARA ENTENDER

Todos los pasajeros de una noria giran con la misma ω, pero los que van en las cestas más alejadas del eje (mayor R) llevan mayor velocidad lineal $v = \omega R$. Es un buen ejemplo para distinguir magnitudes angulares y lineales.

6.1 Movimiento circular uniforme (MCU)

Se llama movimiento circular uniforme al de un móvil que recorre una circunferencia con velocidad angular constante. Sería el que llevaría la noria mientras está funcionando a régimen.

En todo instante $\omega = \omega_m$ y $v = v_m$, por lo que:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \qquad \text{y} \qquad v = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Demostración: ecuaciones del MCU PARA PROFUNDIZAR

De $\omega = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$ se tiene $\mathrm{d}\varphi = \omega\,\mathrm{d}t$. Integrando entre t_0 (φ_0) y t (φ), con ω constante:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \mathrm{d}\varphi = \omega \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t \quad \Longrightarrow \quad \varphi = \varphi_0 + \omega\,(t - t_0),$$

y, multiplicando por R, $S = S_0 + v\,(t - t_0)$. Son análogas a las del MRU.

Como el movimiento se repite, definimos el **periodo** T como el tiempo que tarda en dar una vuelta completa ($\Delta\varphi = 2\pi$ rad): $2\pi = \omega T$, de donde $T = 2\pi/\omega$. La **frecuencia** f es el número de vueltas por unidad de tiempo, $f = 1/T$ (en Hz = s^{-1}).

$$\varphi = \varphi_0 + \omega\,t \qquad S = S_0 + v\,t \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

En un MCU la velocidad **no** es constante, porque su dirección cambia continuamente: existe siempre una aceleración normal, de módulo constante $a_n = \omega^2 R$, dirigida hacia el centro. Por el contrario, la aceleración tangencial es nula, puesto que el módulo de la velocidad no varía.

Ejemplo: la noria PARA ENTENDER

Una noria de radio $R = 20$ m da una vuelta por minuto ($T = 60$ s):

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \approx 0{,}105 \text{ rad/s}, \qquad v = \omega R \approx 2{,}1 \text{ m/s}, \qquad a_n = \omega^2 R \approx 0{,}22 \text{ m/s}^2.$$

La aceleración es pequeña (un 2 % de g), por eso el viaje es tranquilo. Si la noria tuviera la mitad de radio y el mismo periodo, v y a_n se reducirían a la mitad.

6.2 Movimiento circular uniformemente acelerado (MCUA)

Se llama MCUA al de un móvil que recorre una circunferencia con aceleración angular constante. Es el movimiento que llevaría la noria cuando parte del reposo y empieza a funcionar la atracción, o cuando está parando porque finaliza el viaje.

Demostración: ecuaciones del MCUA PARA PROFUNDIZAR

El razonamiento es idéntico al del MRUA, sustituyendo $s \to \varphi$, $v \to \omega$, $a \to \alpha$. Con $t_0 = 0$:

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \;\Rightarrow\; \int_{\omega_0}^{\omega} \mathrm{d}\omega = \int_0^t \alpha\,\mathrm{d}t \;\Rightarrow\; \omega = \omega_0 + \alpha\,t;$$

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \;\Rightarrow\; \int_{\varphi_0}^{\varphi} \mathrm{d}\varphi = \int_0^t (\omega_0 + \alpha t)\,\mathrm{d}t \;\Rightarrow\; \varphi = \varphi_0 + \omega_0\,t + \tfrac{1}{2}\,\alpha\,t^2.$$

Eliminando t entre ambas (igual que en el MRUA): $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\,(\varphi - \varphi_0)$.

$$\omega = \omega_0 + \alpha\,t \qquad \varphi = \varphi_0 + \omega_0\,t + \tfrac{1}{2}\,\alpha\,t^2 \qquad \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\,(\varphi - \varphi_0)$$

Como ahora varían el módulo y la dirección de la velocidad, existen tanto aceleración normal

como tangencial:

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \alpha R = \text{cte} \neq 0; \qquad a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = (\omega_0 + \alpha t)^2 R \quad \text{(no constante)}.$$

Es decir, mientras que el módulo de a_t es constante, el de a_n no lo es, puesto que v varía con el tiempo.

7 Movimiento armónico simple

Para terminar, el barco pirata: ese vaivén que recuerda a un péndulo gigante. La trayectoria es un arco de circunferencia y las posiciones se repiten una y otra vez: es un **movimiento periódico** y **oscilatorio**.

El **movimiento armónico simple** (MAS) es un movimiento periódico, oscilatorio y vibratorio en ausencia de rozamiento, producido por la acción de una fuerza recuperadora directamente proporcional a la distancia a la posición de equilibrio, y que queda descrito en función del tiempo por una función sinusoidal.

Desde un punto de vista dinámico, la fuerza responsable del movimiento en cada instante es proporcional y de signo opuesto al desplazamiento respecto de la posición de equilibrio (ley de Hooke):

$$F = m\,a = -k\,x$$

Demostración: ecuación diferencial del MAS y su solución PARA PROFUNDIZAR

Ecuación diferencial. Aplicando la segunda ley de Newton con $a = \mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$:

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -k\,x \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\,x = 0, \qquad \text{con} \quad \omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Buscamos, por tanto, una función cuya derivada segunda sea ella misma multiplicada por $-\omega^2$.
Solución. Probamos $x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0)$, con A y φ_0 constantes:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A\,\omega\cos(\omega t + \varphi_0), \qquad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -A\,\omega^2\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2\,x,$$

que cumple la ecuación diferencial. Al tener dos constantes arbitrarias, es su solución general; A y φ_0 se determinan con las condiciones iniciales (x_0 y v_0).
Periodo. El seno se repite cuando su argumento aumenta en 2π: $\omega(t+T) + \varphi_0 = \omega t + \varphi_0 + 2\pi$, de donde

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

que no depende de la amplitud (*isocronismo* de las oscilaciones).

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0), \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Se define:

- **Elongación** (x): distancia, con signo, entre la posición del móvil y la posición de equilibrio.
- **Amplitud** (A): elongación máxima. ¿Hasta dónde sube el barco?
- **Periodo** (T): tiempo que se tarda en pasar dos veces consecutivas por el mismo punto en el mismo sentido (una oscilación completa).
- **Frecuencia** (f): número de oscilaciones por segundo. Es el inverso del periodo, $f = 1/T$.
- **Pulsación o frecuencia angular** (ω): $\omega = 2\pi f$, en rad/s.
- **Fase inicial o desfase** (φ_0): valor del ángulo de fase $(\omega t + \varphi_0)$ en el instante $t = 0$.

Para deducir el valor de la velocidad y la aceleración basta con derivar la elongación respecto del tiempo:

Demostración: velocidad y aceleración del MAS PARA PROFUNDIZAR

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A\,\omega\cos(\omega t + \varphi_0), \qquad a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -A\,\omega^2\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x.$$

Velocidad en función de la posición. Usando $\cos\theta = \pm\sqrt{1 - \mathrm{sen}^2\,\theta}$ y $\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0) = x/A$:

$$v = \pm A\omega\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} = \pm\,\omega\sqrt{A^2 - x^2}.$$

Por tanto, la velocidad es máxima ($v_{\text{máx}} = A\omega$) en el centro ($x = 0$) y nula en los extremos ($x = \pm A$), mientras que la aceleración es nula en el centro y máxima ($a_{\text{máx}} = A\omega^2$) en los extremos, siempre dirigida hacia la posición de equilibrio.

$$v = A\,\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$a = -A\,\omega^2\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x$$

Ejemplo: un muelle que oscila PARA ENTENDER

Una masa de 0,5 kg cuelga de un muelle de constante $k = 50$ N/m y oscila con amplitud $A = 10$ cm:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10\ \text{rad/s}, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 0{,}63\ \text{s}, \qquad v_{\text{máx}} = A\omega = 1\ \text{m/s}, \qquad a_{\text{máx}} = A\omega^2 = 10\ \text{m/s}^2.$$

Si duplicamos la amplitud, $v_{\text{máx}}$ y $a_{\text{máx}}$ se duplican, pero el periodo no cambia (isocronismo).

Amplía: relación entre el MAS y el MCU PARA PROFUNDIZAR

Si un punto describe un MCU de radio A con velocidad angular ω, su proyección sobre un diámetro vertical es $y = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0)$: *la proyección de un MCU sobre un diámetro es un MAS*. Por eso ω recibe el nombre de pulsación o frecuencia angular, aunque en el MAS no haya nada que gire.

Ejemplo: el barco pirata y las pequeñas oscilaciones PARA ENTENDER

Sobre un péndulo de longitud L desplazado un ángulo θ, la componente tangencial del peso es $F_t = -mg\,\mathrm{sen}\,\theta$, que *no* es proporcional a θ. Solo para ángulos pequeños ($\theta \lesssim 15°$) podemos hacer $\mathrm{sen}\,\theta \approx \theta$; como el arco es $s = L\theta$:

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{mg}{L}\,s \quad\Longrightarrow\quad \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

El barco pirata, que oscila con grandes amplitudes, es por tanto un buen ejemplo *motivador* de mo-

vimiento oscilatorio periódico, pero solo es un MAS en la aproximación de pequeñas oscilaciones.

Los gráficos siguientes corresponden a la elongación, la velocidad y la aceleración del MAS cuando la fase inicial φ_0 es cero:

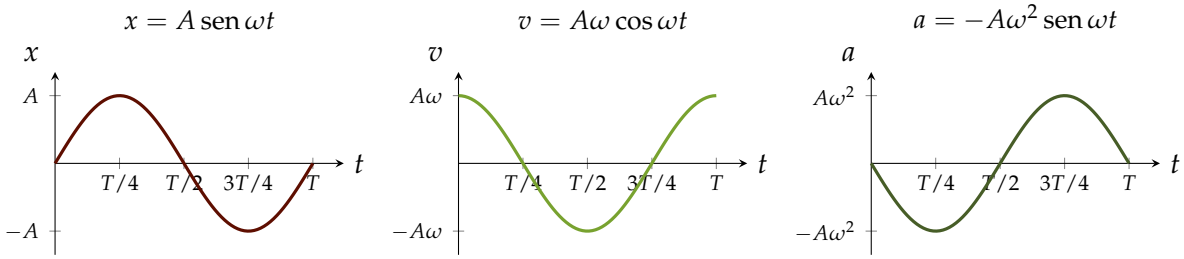


Figura 7: Elongación, velocidad y aceleración frente al tiempo en un MAS ($\varphi_0 = 0$). La velocidad está adelantada $\pi/2$ respecto de la elongación y la aceleración está en oposición de fase con ella.

Para el aula: ideas previas y errores frecuentes PARA PROFUNDIZAR

- **Confundir desplazamiento y distancia recorrida.** Una vuelta completa a la noria supone un desplazamiento nulo, pero una distancia $2\pi R$.
- **Identificar aceleración negativa con frenar.** El movimiento es retardado cuando a y v tienen signos opuestos; el signo de a por sí solo depende del criterio elegido.
- **Pensar que en el punto más alto de un lanzamiento vertical la aceleración es nula.** Allí $v = 0$, pero $a = -g$ en todo momento.
- **Creer que con rapidez constante no hay aceleración.** En una curva, o en el MCU, existe aceleración normal.
- **Leer la gráfica s–t como si fuera la trayectoria.** Conviene trabajar en paralelo el dibujo del recorrido y la gráfica, por ejemplo con sensores de movimiento o videoanálisis.

Detectar estas ideas con preguntas de predicción («¿qué marcará el acelerómetro en lo alto de la torre?») antes de explicar es más eficaz que corregirlas después.

Métodos para el estudio experimental del movimiento

8 Técnicas de medida y tratamiento de datos

Estudiar un movimiento en el laboratorio consiste, en el fondo, en obtener una **tabla de posiciones y tiempos** y extraer de ella la velocidad y la aceleración. Los métodos se diferencian en cómo se mide cada pareja (t, s), y conviene elegirlos según el nivel del alumnado y el movimiento que se quiere estudiar:

- **Cronómetro y cinta métrica.** Es lo más sencillo, pero el tiempo de reacción de quien cronometra (del orden de 0,1–0,2 s) introduce en cada medida un error que pesa mucho si el intervalo es corto. Por eso se repite cada medida varias veces y se eligen recorridos largos y movimientos lentos (prácticas de MRU y MRUA).
- **Fotopuertas.** El móvil interrumpe un haz de luz y un contador mide el tiempo con precisión de milisegundos. Si una lámina de anchura d corta el haz durante Δt, la velocidad en ese

punto es $v \approx d/\Delta t$ (una velocidad media en un intervalo tan corto que se toma como instantánea).

- **Registros a intervalos iguales.** El registrador de marcas (*ticker*) deja en una cinta de papel unida al móvil una marca cada 0,02 s (50 por segundo), y la fotografía estroboscópica o de exposición múltiple fotografía el móvil a intervalos iguales. Basta mirar las marcas: equidistantes en el MRU y cada vez más separadas en el MRUA, en el que la diferencia entre dos separaciones consecutivas es constante e igual a $a\,(\Delta t)^2$.
- **Sensores de movimiento por ultrasonidos.** Emiten un pulso y miden el tiempo t que tarda en volver el eco; la distancia es $d = v_{\text{sonido}}\,t/2$ ($v_{\text{sonido}} \approx 343$ m/s a 20 °C). Conectados a una interfaz, dibujan en tiempo real las gráficas s–t, v–t y a–t.
- **Videoanálisis.** Se graba el movimiento junto a una escala de longitud conocida y se marca la posición del móvil fotograma a fotograma (por ejemplo, con *Tracker*); a 30 o 60 fotogramas por segundo, el intervalo entre datos es de 1/30 o 1/60 s. Es ideal para el tiro parabólico o el péndulo.
- **Sensores del teléfono móvil.** El acelerómetro, el giroscopio y el GPS, con aplicaciones como *phyphox*, permiten medir fuera del laboratorio: la velocidad angular de un tiovivo, la aceleración normal en una curva o el periodo de un columpio.

Una vez obtenidos los datos, el **tratamiento** sigue siempre los mismos pasos:

- **Gráficas temporales.** Se representa el tiempo en abscisas y la magnitud cinemática (s, v o a) en ordenadas. La forma de la gráfica identifica el movimiento, la pendiente de la gráfica s–t es la velocidad, la de la gráfica v–t es la aceleración, y el área bajo la gráfica v–t es el desplazamiento.
- **Linealización y ajuste.** Para comprobar una ley no lineal se representan las variables que la convierten en una recta: en un MRUA que parte del reposo, s frente a t^2 (pendiente $a/2$); en un péndulo, T^2 frente a L (pendiente $4\pi^2/g$). La recta se ajusta por mínimos cuadrados con una hoja de cálculo, y el coeficiente de determinación r^2 indica la calidad del ajuste.
- **Análisis de errores.** Cada resultado se da con su incertidumbre (valor medio $\pm$ error absoluto) y su error relativo, con las cifras significativas adecuadas. Los **errores aleatorios** se reducen repitiendo las medidas; los **sistemáticos** (un cero mal ajustado, el rozamiento o la rodadura de una bola) no, y hay que identificarlos y corregirlos.

Las tres prácticas que siguen aplican estos métodos en distintos niveles educativos.

9 Práctica de laboratorio: MRU

Objetivos

- Estudiar las características de un MRU.
- Determinar la velocidad de un MRU.

Procedimiento

1. Colocar una rueda en el eje de un motor. Unir la rueda y un cochecito mediante un hilo que se pueda recoger en la rueda, y colocar el montaje en un carril de desplazamiento donde

están señaladas diversas distancias.

2. Aflojar el tornillo de la rueda para poder llevar el coche al punto origen del recorrido. Volver a fijar el tornillo sin apretar mucho.
3. Cronometrar el tiempo empleado por el coche para ir desde el punto 0 hasta el punto 180 cm. Para ello, poner en marcha el motor oprimiendo el pulsador, cuidar que el hilo se recoja en la rueda, y poner en marcha y parar el cronómetro cuando el coche pase por los puntos convenidos. Hacer esta medida cinco veces y anotar los resultados en la tabla de datos.
4. Repetir para otros cuatro desplazamientos.

Análisis de resultados (alumnos de 2.º ESO)

Opción a. Calculamos la velocidad en cada uno de los casos, $v = \Delta s/\bar{t}$, y comprobamos que, al tratarse de un movimiento rectilíneo uniforme, los valores obtenidos coinciden dentro del error experimental.

Opción b. Esto también puede comprobarse mediante una representación gráfica. Representando en un sistema de ejes los valores de las magnitudes posición–tiempo, obtendremos una línea recta cuya pendiente coincide numéricamente con el valor de la velocidad. Se completará con un ajuste por mínimos cuadrados en una hoja de cálculo para desarrollar la competencia digital de los alumnos.

Δs (cm)	t_1 (s)	t_2 (s)	t_3 (s)	t_4 (s)	t_5 (s)	$\bar{t}$ (s)	$v = \Delta s/\bar{t}$ (cm/s)
180							
...							

10 Práctica de laboratorio: MRUA

En este caso la práctica está enfocada a alumnos de 4.º ESO, porque deben manejar conceptos de trigonometría y dinámica más avanzados que los que se trabajan en 2.º ESO.

Objetivos

- Estudiar un ejemplo de MRUA.
- Determinar la aceleración de la gravedad.

Materiales

Un carril de deslizamiento, una bola de acero, un cronómetro y una pieza de madera para inclinar el carril.

Procedimiento

1. Colocar la pieza de madera para dar inclinación al carril.
2. Medir la altura h y la base b del plano inclinado y calcular el ángulo α que forma con la horizontal ($\operatorname{tg}\alpha = h/b$).
3. Cronometrar el tiempo empleado por la bola en recorrer cada una de las siguientes distancias: 40, 60, ..., 180 cm. Para ello, colocar la bola en el extremo de la pista de lanzamiento y soltarla, evitando empujarla, para que su velocidad inicial sea cero. Poner en marcha el cronómetro al soltarla y pararlo cuando la bola pase por el punto convenido. Para cada una de las distancias, realizar la medida del tiempo un mínimo de cinco veces y calcular el valor medio.

Análisis de resultados

Como la bola parte del reposo ($v_0 = 0$), las ecuaciones del MRUA se reducen a

$$s = \tfrac{1}{2}\,a\,t^2 \;\Rightarrow\; a = \frac{2s}{t^2}, \qquad v = a\,t = \frac{2s}{t}\ \text{(velocidad al pasar por el punto } s\text{)}.$$

1. Reflejar todas las medidas en una tabla, calculando los tiempos medios.
2. Con el tiempo medio y la distancia recorrida, calcular el valor de la aceleración para cada una de las medidas realizadas.
3. Calcular la velocidad en cada punto ($v = 2s/t$) y representar la velocidad frente al tiempo.
4. Calcular la aceleración como pendiente de la recta velocidad–tiempo (alternativamente, como el doble de la pendiente de la gráfica s frente a t^2).
5. Calcular la aceleración de la gravedad a partir de la aceleración obtenida y de la inclinación de la rampa: sin rozamiento, $a = g\,\operatorname{sen}\alpha \Rightarrow g = a/\operatorname{sen}\alpha$.
6. Calcular el valor teórico de la aceleración en el plano inclinado si $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$ y no hay rozamiento, y compararlo con el valor experimental.
7. Estimar el efecto de las fuerzas de rozamiento a partir de esa diferencia.
8. Razonar las posibles fuentes de error.

> **Nota para el docente** PARA PROFUNDIZAR
>
> Una bola que *rueda* sin deslizar no cumple $a = g\,\operatorname{sen}\alpha$: parte de su energía se invierte en la rotación y, para una esfera maciza, $a = \frac{5}{7}\,g\,\operatorname{sen}\alpha$ (en un carril de dos raíles, algo menos aún). Si se usa $g = a/\operatorname{sen}\alpha$ se obtendrá un valor en torno a $7\ \mathrm{m/s^2}$, y esa diferencia *no* se debe al rozamiento. Conviene usar $g = 7a/(5\operatorname{sen}\alpha)$, comentar este hecho con los alumnos como fuente de error sistemático, o bien sustituir la bola por un carrito de baja fricción.

11 Práctica de laboratorio: tiro horizontal

Objetivos

- Estudiar un ejemplo de tiro horizontal y comprobar que la trayectoria es parabólica.
- Relacionar la trayectoria con la velocidad de salida y el valor de la gravedad.

Materiales

Soporte y pinza, carril de deslizamiento, bola de acero, pie soporte de madera, hoja de papel carbón, hoja de papel milimetrado, esponja amortiguadora, regla graduada de un metro y pie de rey.

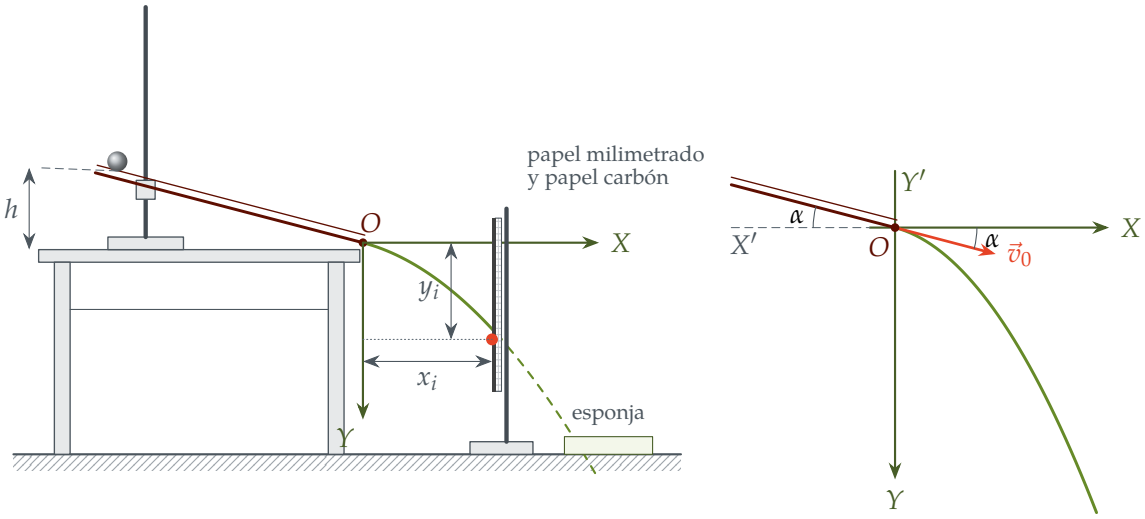


Figura 8: Montaje experimental y sistema de referencia (eje Y hacia abajo).

Procedimiento

1. Realizar el montaje de la figura.
2. Colocar la banda de papel milimetrado sobre el soporte vertical, sujetándola con cinta adhesiva.
3. Marcar sobre dicho papel una línea horizontal que coincida con el centro de la bola en el extremo más bajo del carril de lanzamiento.
4. Separar de 2 en 2 cm el soporte vertical del extremo del carril y dejar caer la bola a lo largo del carril, de forma que al abandonarlo describa una curva en el aire. Para registrar el impacto de la bola sobre el papel milimetrado, colocar delante de él el papel carbón.
5. Repetir el lanzamiento un mínimo de tres veces para cada valor de x.
6. Medir el ángulo α del tramo final del carril. Para ello, hallar x e y para un punto cualquiera del carril inclinado ($\operatorname{tg}\alpha = y/x$).
7. Medir también la altura h desde la que se lanza la bola.

Análisis de datos

Con el eje Y dirigido hacia abajo y el origen en el punto de salida, si la bola abandona el carril con velocidad v_0 formando un ángulo α por debajo de la horizontal:

$$x = v_0 \cos\alpha\ t, \qquad y = v_0 \operatorname{sen}\alpha\ t + \tfrac{1}{2} g\, t^2 \quad \Longrightarrow \quad y = x\ \operatorname{tg}\alpha + \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}\, x^2.$$

Si el final del carril es horizontal ($\alpha = 0$), se trata de un tiro horizontal en sentido estricto:

$$y = \frac{g}{2v_0^2}\, x^2.$$

1. Con los datos de la tabla, representar la gráfica correspondiente a la trayectoria.
2. Realizar un ajuste a una función cuadrática $y = b\,x + c\,x^2$. Comprobar que $b \approx \operatorname{tg}\alpha$ y obtener el coeficiente c, que debe valer
$$c = \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}.$$
3. Con $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$, calcular la velocidad de salida v_0. Si se mide v_0 de forma independiente (fotopuerta o videoanálisis), despejar el valor de g.
4. Analizar las posibles fuentes de error.

Nota para el docente PARA PROFUNDIZAR

Si la velocidad de salida se calcula a partir de la altura h por conservación de la energía (por ejemplo, $v_0^2 = \frac{10}{7}gh$ para una esfera que rueda), g se simplifica en el coeficiente c y la forma de la trayectoria *no depende de* g. En ese caso la práctica permite comprobar el modelo (comparar c con su valor teórico $7/(20\,h\cos^2\alpha)$), pero no medir la gravedad; para obtener g hace falta medir v_0 por otro procedimiento.

12 Conclusión y valoración personal

Síntesis

A lo largo del tema hemos construido las herramientas necesarias para describir cualquier movimiento (sistema de referencia, vectores posición y desplazamiento, velocidad y aceleración, con sus componentes intrínsecas) y las hemos aplicado a los movimientos de especial interés: rectilíneos, parabólico, circulares y armónico simple. Por último, hemos repasado los métodos para estudiar el movimiento experimentalmente (técnicas de medida, gráficas, ajustes y análisis de errores) y hemos propuesto tres prácticas que muestran cómo se aplican en el laboratorio.

Valoración personal

Desde mi experiencia, la cinemática es el primer lugar donde muchos alumnos descubren que las matemáticas sirven para describir la realidad: una derivada deja de ser un cálculo abstracto cuando representa la velocidad de un vagón. Por eso la considero un tema clave para construir el pensamiento científico en Secundaria y Bachillerato.

También he comprobado que la mayor dificultad no está en las fórmulas, sino en las ideas previas: confundir velocidad y aceleración, pensar que en el punto más alto de un lanzamiento la aceleración es nula o creer que en una curva tomada a velocidad constante no hay aceleración. Detectar estos errores y trabajarlos con situaciones concretas es, a mi juicio, más valioso que acumular problemas.

Por último, hoy tenemos a nuestro alcance recursos impensables hace unos años: los sensores del propio móvil (por ejemplo, con la aplicación *phyphox*) o el análisis de vídeo con programas libres como *Tracker* permiten que el alumnado mida y analice movimientos reales, dentro y fuera del aula. Integrarlos en las prácticas acerca la física a su día a día y desarrolla la competencia digital que marca el currículo.

En definitiva, enseñar cinemática es enseñar a mirar: que el alumno termine el tema viendo vectores donde antes solo veía una montaña rusa.